## Notations et définitions

Le problème traite de certaines propriétés concernant les racines de polynômes dont les coefficients sont aléatoires.

- Dans tout le problème, l'espace $\mathbb{R}^n$ sera muni du produit scalaire canonique usuel défini, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, par $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. La norme euclidienne associée sera notée $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
- La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ sera notée $S^{n-1}$. C'est par définition $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| = 1\}$. La boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ sera notée $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| \leqslant 1\}$.
- La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ sera notée $\lambda_n$, voire $\lambda$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de $n$.
- Les coefficients binomiaux seront notés $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. On pourra aussi utiliser la notation $C_n^k$.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de nombres réels, on dit que $(u_n)$ est dominée par $(v_n)$, et on note $u_n \in O(v_n)$ ou bien $u_n = O(v_n)$, s'il existe une constante $C$ telle que $|u_n| \leqslant C|v_n|$ à partir d'un certain rang.

## Partie I
## Asymptotique du nombre de zéros

On définit dans cette partie pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ les trois fonctions

$$A_n(t) = \frac{n^2}{t^2 + 2nt}, \quad B_n(t) = \frac{(n+1)\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1} \text{ et } \delta_n(t) = \sqrt{A_n^2(t) - B_n^2(t)}.$$

On admettra provisoirement que $A_n(t) \geqslant B_n(t)$ pour tout $t > 0$, ce qui garantit la définition de $\delta_n(t)$.

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} A_n(t)\,dt$.
2. Les inégalités des questions (a), (b) et (c) suivantes sont demandées pour tout $t > 0$.

   (a) Justifier que $|\delta_n(t) - A_n(t)| \leqslant \dfrac{B_n^2(t)}{A_n(t)}$.

   (b) On pose $\varphi_n(t) = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1}$. Montrer que $\varphi_n(t) \leqslant \dfrac{1}{2t + 2t^2}$.

   (c) Vérifier que $|\delta_n(t) - A_n(t)| \leqslant -(n+1)t\varphi_n'(t)$.

   (d) En déduire que la suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\delta_n(t) - A_n(t)|\,dt \in O(n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

   (e) Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \delta_n(t)\,dt$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

3. On pose

$$N_n(t) = \left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1\right)^2 - (n+1)^2\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n}\left(\frac{2t}{n}+\frac{t^2}{n^2}\right)^2$$

$$D_n(t) = \left(\frac{2t}{n}+\frac{t^2}{n^2}\right)^2\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1\right)^2$$

de sorte que $\delta_n(t)^2 = \dfrac{N_n(t)}{D_n(t)}$ pour tout $t > 0$.

(a) À l'aide d'un développement limité, déterminer les valeurs de $N_n(0)$, $N_n'(0)$, $N_n''(0)$. En déduire l'intégrabilité de $\delta_n(t)$ en 0.

(b) Vérifier que $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n} \leqslant \mathrm{e}^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ de classe $\mathcal{C}^3$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $M$ tel que $|g_n(t)|$, $|g_n'(t)|$, $|g_n''(t)|$ et $|g_n'''(t)|$ soient tous inférieurs à $M$ pour tout $t$ dans $[0,1]$ et pour tout $n \geqslant 1$.

Montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, puis que $(N_n)_{n\geqslant 1}$ est dans $\mathcal{B}$.

(c) Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_0^1 \delta_n(t)\,\mathrm{d}t \in O(n)$.

4. (a) Vérifier que $\dfrac{1}{t^2-1} - \dfrac{(n+1)t^n}{t^{2n+2}-1} \geqslant 0$ pour tout $t > 1$.

On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ valable pour tout $x > 0$.

(b) On démontrera ultérieurement que

$$E_n = \frac{4}{\pi}\int_1^{+\infty}\sqrt{\frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}}\,\mathrm{d}t$$

est le nombre moyen de racines réelles d'un polynôme de degré $n$ dont les coefficients sont aléatoires.

À l'aide du changement de variable $t = 1+\dfrac{x}{n}$, déterminer un équivalent de $E_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

# Partie II
# Balayages orthogonaux sur la sphère

## II.A - Une mesure invariante sur la sphère

Dans cette partie, $n$ est un entier fixé ($n \geqslant 3$).

On construit une mesure sur la sphère $S^{n-1}$, héritée de la mesure de Lebesgue $\lambda_n$. Pour toute partie $A \subset S^{n-1}$, on définit le cône engendré par $A$ comme l'ensemble

$$C = \{t.x \mid t \in [0,1], x \in A\}.$$

Lorsque $C$ est mesurable, on pose alors $\lambda_S(A) = \dfrac{\lambda_n(C)}{\lambda_n(B^n)}$. On a en particulier $\lambda_S(S^{n-1}) = 1$.

On admet que les images réciproques de boréliens de $\mathbb{R}$ par des restrictions à $S^{n-1}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$ sont mesurables.

**La présence de dessins clairs sera vivement appréciée.**

1. Vérifier que pour tout $h > 0$ on a

$$\lambda_S\Big(S^{n-1} \cap ([-h,h] \times [-1,1]^{n-1})\Big) \leqslant \frac{2^n h}{\lambda_n(B^n)}.$$

2. Montrer que $\lambda_S$ est invariante par rotation, i.e. pour toute rotation vectorielle $r$ de $\mathbb{R}^n$ et pour toute partie mesurable $A \subset S^{n-1}$ on a $\lambda_S(r(A)) = \lambda_S(A)$.
3. On définit, lorsque $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi$, le *quartier de disque* $\Omega_{\alpha,\beta}$ comme l'ensemble

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r \in [0,1], \theta \in [\alpha,\beta]\},$$

puis le *quartier de sphère* $Q_{\alpha,\beta}$ comme l'ensemble des points $(x_1,\ldots,x_n) \in S^{n-1}$ tels que $(x_1,x_2) \in \Omega_{\alpha,\beta}$.

Vérifier que lorsque $\theta$ et $\theta'$ sont positifs et que $\theta + \theta' \leqslant 2\pi$, alors

$$\lambda_S(Q_{0,\theta+\theta'}) = \lambda_S(Q_{0,\theta}) + \lambda_S(Q_{0,\theta'}).$$

En déduire que $\lambda_S(Q_{\alpha,\beta}) = \dfrac{\beta-\alpha}{2\pi}$.

*Dans toute la suite du problème, lorsque $a$ et $b$ sont deux points de $S^{n-1}$, on appelle longueur d'arc entre $a$ et $b$ la quantité* $\mathrm{L}(ab) = \arccos(\langle a,b\rangle)$.

4. Soit $a$ et $b$ deux points de $S^{n-1}$. Montrer l'existence d'une constante $K$ indépendante de $a$ et $b$ telle que

$$||b-a|| - K||b-a||^2 \leqslant \mathrm{L}(ab) \leqslant ||b-a|| + K||b-a||^2.$$

5. On considère $\theta \in [0,\pi]$ et les deux points de $S^{n-1}$ définis par $a = (1,0,\ldots,0)$ et $b = (\cos\theta, \sin\theta, 0, \ldots, 0)$. Déterminer en fonction de $\theta$ la quantité

$$\lambda_S\Big(\{x \in S^{n-1} \mid \langle x,a\rangle\langle x,b\rangle \leqslant 0\}\Big).$$

De façon générale, $a$ et $b$ étant cette fois-ci quelconques dans $S^{n-1}$, vérifier que

$$\lambda_S\Big(\{x \in S^{n-1} \mid \langle x,a\rangle\langle x,b\rangle \leqslant 0\}\Big) = \frac{\mathrm{L}(ab)}{\pi}.$$

### II.B - Balayages orthogonaux

Soit $t \mapsto \gamma(t)$ une fonction régulière définie sur un **segment** $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $S^{n-1}$. Pour tout point $a \in S^{n-1}$, on définit le nombre de passages orthogonaux en $a$ pendant l'intervalle $J \subset I$ par

$$N_J(a) = \mathrm{Card}\{t \in J \mid a \perp \gamma(t)\},$$

le cardinal étant à valeur dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. L'aire orthogonale balayée par $\gamma$ est alors

$$\mathcal{A}_I = \int_{a \in S^{n-1}} N_I(a)\,\mathrm{d}\lambda_S(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} k.\lambda_S(N_I^{-1}(k)).$$

*On admet la mesurabilité des fonctions $N_J$.*

On se place ici dans le cas où $\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour presque tout $a \in S^{n-1}$, $N_I(a) \leqslant M$. Par ailleurs, on note $||\gamma'||_\infty = \sup_{t\in I} ||\gamma'(t)||$ et $||\gamma''||_\infty = \sup_{t\in I} ||\gamma''(t)||$.

1. Soit $a \in S^{n-1}$ et $h > 0$.
   (a) Montrer que si $\langle a, \gamma(t)\rangle\langle a, \gamma(t+h)\rangle \leqslant 0$, alors $N_{[t,t+h]}(a) \geqslant 1$.
   (b) Vérifier que si $N_{[t,t+h]}(a) \geqslant 2$, alors on peut trouver $c$ dans $[t, t+h]$ tel que $a$ soit orthogonal à $\gamma'(c)$. En déduire que
   $$|\langle a, \gamma(t)\rangle| \leqslant h^2 \, ||\gamma''||_\infty.$$
   (c) Montrer la même inégalité lorsque l'on a $\langle a, \gamma(t)\rangle\langle a, \gamma(t+h)\rangle > 0$ et $N_{[t,t+h]}(a) \geqslant 1$.
2. (a) Déduire des résultats précédents que les quantités suivantes peuvent être majorées par un terme proportionnel à $h^2$ et ne dépendant pas de $t$ :
   $$i)\ \left|\lambda_S\Big(N^{-1}_{[t,t+h]}(1)\Big) - \frac{\mathrm{L}(\gamma(t)\gamma(t+h))}{\pi}\right| \qquad ii)\ \left|\mathcal{A}_{[t,t+h]} - \frac{||\gamma(t)-\gamma(t+h)||}{\pi}\right|$$
   (b) Vérifier alors que $\mathcal{A}_I = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_I ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t$.

# Partie III
# Le nombre moyen de zéros d'un polynôme

## III.A - Coefficients de même loi gaussienne

On considère des variables aléatoires $a_1, \ldots, a_n$ gaussiennes, indépendantes, de moyenne nulle et de variance 1. Leur loi jointe est définie par

$$\mathbb{P}\Big((a_1, \ldots, a_n) \in A\Big) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{||x||^2}{2}} \mathrm{d}\lambda_n(x).$$

On se donne $n$ fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, formant un système libre dans l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ d'un intervalle $I$ dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction aléatoire $f = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$, et on s'intéresse au nombre moyen de zéros de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$.

On suppose que les $(f_k)$ ne s'annulent pas simultanément ; on pose $v(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ et $\gamma(t) = \dfrac{v(t)}{||v(t)||}$. On suppose aussi qu'il existe un nombre $M$ tel que, presque sûrement, $f$ admet moins de $M$ zéros sur $I$.

1. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$. La variable $\dfrac{a}{||a||}$ est à valeurs dans $S^{n-1}$. Montrer que la loi de $\dfrac{a}{||a||}$ est invariante par rotation, i.e. $\mathbb{P}\Big(\dfrac{a}{||a||} \in A\Big) = \mathbb{P}\Big(\dfrac{a}{||a||} \in r^{-1}(A)\Big)$ pour toute rotation vectorielle $r$ de $\mathbb{R}^n$ et tout borélien $A$.

   **Dans la suite, on admettra que la loi de $\dfrac{a}{||a||}$ est $\lambda_S$.**

2. Montrer que le nombre moyen de zéros de $f$ sur l'intervalle $I$ est
   $$\frac{1}{\pi}\int_I ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t$$
   *On prendra garde au fait que $I$ n'est pas forcément un segment.*

3. Montrer que $||\gamma'(t)||^2 = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}(t,t)$, où $\varphi$ est définie sur un ouvert autour de la droite $y = x$ par
$$\varphi(x,y) = \ln\langle v(x), v(y)\rangle.$$

4. En déduire que le nombre moyen de zéros réels d'un polynôme $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, aléatoire de degré $n$, dont tous les coefficients $(a_k)$ sont indépendants et de même loi gaussienne de moyenne nulle et de variance 1, est donné par la valeur $E_n$ définie à la dernière question de la première partie.

### III.B - Une classe de polynômes circulaires

Dans toute cette partie, $n$ est un entier fixé. À un polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ on associe le polynôme homogénéisé $\tilde{P}(X,Y) = a_0Y^n + a_1XY^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}Y + a_nX^n$, élément du sous-espace vectoriel $E$ de $\mathbb{R}[X,Y]$ engendré par les monômes $X^kY^{n-k}$ pour $k \in \{0,\ldots,n\}$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on définit l'opérateur $L_\theta$ qui à $P(X,Y) \in E$ associe le polynôme
$$L_\theta(P) = P(\cos\theta X + \sin\theta Y, -\sin\theta X + \cos\theta Y).$$

1. (a) Montrer que $L_\theta$ est un endomorphisme de $E$. Que vaut $L_\theta \circ L_{\theta'}$ ?

   (b) On associe chaque élément de $E$ à ses coordonnées dans la base canonique $(X^kY^{n-k})_{0\leqslant k\leqslant n}$. $L_\theta$ est alors assimilé à un endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$.

   Montrer que $\dfrac{\partial(L_\theta(P))}{\partial\theta} = A.L_\theta(P)$, avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -n & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -(n-1) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   la matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}}$ étant définie par les relations
$$\begin{cases} a_{i,j} = j & \text{si } j = i+1 \\ a_{i,j} = j-n & \text{si } j = i-1 \\ a_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (*on pourra d'abord vérifier la relation en* $\theta = 0$).

   (c) Prouver qu'il existe une unique matrice $D$ diagonale à coefficients positifs, dont le premier coefficient diagonal est 1, et telle que $B = DAD^{-1}$ soit une matrice antisymétrique. Préciser les coefficients de $D$.

   (d) En déduire que pour tout $\theta$ il existe une matrice orthogonale $Q(\theta)$ telle que pour tout $P \in E$ on a $DL_\theta(P) = Q(\theta)DP$.

2. On considère une suite $(a_0,\ldots,a_n)$ de variables aléatoires, indépendantes, de lois gaussiennes de moyenne nulle et de variance $\mathrm{Var}(a_k) = \dbinom{n}{k}$, ce qui signifie que la loi jointe des variables $a_k\dbinom{n}{k}^{-1/2}$ est similaire (avec $n+1$ à la place de $n$) à celle qui est donnée dans le préambule de la partie **III.A**.

(a) Soit $P \in E$ défini par $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k Y^{n-k}$. On fixe $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la variable aléatoire $L_\theta(P)$ à valeurs dans $E$ a la même loi que $P$.

(b) Calculer le nombre moyen de zéros réels de $P$ contenus dans l'intervalle $]a, b[$, où $a < b$ avec $a, b$ éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

# Partie IV
# Quelques résultats sur les séries aléatoires

## IV.A - Majoration du nombre de racines d'un polynôme

On considère dans cette partie un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ à coefficients complexes de degré $n$.

On définit la *mesure de* $P$ par $M(P) = |a_n| \prod \max(1, |z|)$ où le produit est pris sur l'ensemble des racines complexes de $P$, répétées avec leur multiplicité.

On définit la norme de $P$ par $||P|| = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2}$.

1. (a) Montrer que pour tout polynôme $Q$ à coefficients complexes, et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a l'égalité
$$||(X+z)Q(X)|| = ||(\overline{z}X+1)Q(X)||.$$
   (b) En déduire que $M(P) \leqslant ||P||$.
2. On considère $0 < \rho < 1$ et on suppose $a_0 \neq 0$. Montrer que le nombre de racines de module inférieur à $\rho^2$ est inférieur à
$$\frac{1}{\ln \frac{1}{\rho}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \rho^{2k}}}{|a_0|}.$$

## IV.B - Cas de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$

On considère une suite $(a_k)_{k \geqslant 0}$ de variables aléatoires indépendantes, de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance 1.

Pour toute fonction $g$, on définit $Z_{[a,b]}(g)$, élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, par
$$Z_{[a,b]}(g) = \mathrm{Card}\{t \in [a, b] \mid g(t) = 0\}.$$

On sera amené à utiliser dans cette partie la forme faible du théorème de Borel-Cantelli, que l'on rappelle ici : « *Si $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite d'évènements aléatoires, tels que la série* $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ *converge, alors* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geqslant 0} \bigcup_{p \geqslant n} A_p\right) = 0$ ».

1. Montrer que la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$ est presque sûrement de rayon de convergence $+\infty$.
2. On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$. Soit $[a, b]$ un segment.

   Montrer que, presque sûrement, $Z_{[a,b]}(f)$ est finie, $f$ et $f'$ n'ont pas de zéro commun et $Z_{[a,b]}(S_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z_{[a,b]}(f)$.
3. Prouver que l'espérance $\mathbb{E}(Z_{[a,b]}(S_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z_{[a,b]}(f))$ et calculer cette limite en fonction de $a$ et de $b$.

### IV.C - Cas de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

Ici encore, on considère une suite $(a_k)$ de variables aléatoires indépendantes, de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance 1.

Montrer que la série entière $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est presque sûrement de rayon de convergence 1, et calculer $\mathbb{E}(Z_{[a,b]}(f))$ lorsque $-1 < a < b < 1$.

---